KSN — III FK — zadanie 6.2
Iteracyjne rozwiązywanie układów równań liniowych

Jednym ze źrodeł układów równań algebraicznych mogą być równania różniczkowe. Dla prostego oscylatora harmonicznego z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t). \tag{1}$$

Przybliżając występującą po lewej stronie równania (1) drugą pochodną położenia x w chwilit t ilorazem różnicowym:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

i wprowadzając oznaczenia $\Delta t = h$, $x_i = x(ih)$ otrzymujemy z równania (1) iteracyjny przepis pozwlający na wyznaczenie x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1}:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \tag{2}$$

Do jednoznaczego rozwiązania potrzeba jeszcze infomacji o wartościach x_0 i x_1. Dają je warunki początkowe: $x_0 = A$ jest początkowym wychyleniem z położenia równowagi, zaś iloraz $(x_1 - x_0)/h = v_0$ informuje o początkowej wartości prędkości ciała.

Równanie (2) wraz z warunkami początkowymi daje się zapisać w postaci macierzowej dla pierwszych siedmiu kroków czasowych jako:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sytuacja jest więc wysoce komfortowa: $\mathbf{D} = \mathbf{1}$, $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, zaś $\mathbf{L}$ ma na pierwszej poddiagonali prawie same $(\omega^2h^2 - 2)$ i same jedynki na drugiej poddiagonali.

Iteracyjny przepis dla metody Jacobiego $\mathbf{x}^{n+1} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^n + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$ sprowadza się w tym przypadku do $\mathbf{x}^{n+1} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})\mathbf{x}^n + \mathbf{b}$.

Chociaż metoda Jacobiego ma znaczenie wyłącznie dydaktyczne ze względu na bardzo wolną zbieżność proszę spróbować rozwiązać równanie oscylatora harmonicznego dla kilku pierwszych okresów drgań $T = 2\pi/\omega$.

Kilka uwag natury technicznej:

- Proszę przyjąć „wygodne” warunki początkowe: $v_0 = 0$, $A = 1$.
- Obliczenia proszę prowadzić w podwójnej precyzji.
- Krok całkowania $h = t_{\max}/10001$.
- Przed rozpoczęciem naciskania klawiszy potrzeba pięciu minut z kartką i ołówkiem.
- 10^4 iteracji powinno całkowicie wystarczyć.

Krzysztof Malarz, Kraków, 19 listopada 2003